# **מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 7 – קומבינטוריקה**

#### תרגילים להגשה: 24, 25, 26, 27 ב+ג+ה, 28, 29 ב+ד, 30, 32, 34, 36

## 24. (א) בכמה אופנים ניתן לחלק עשרים אנשים לארבע קבוצות כדור סל? (ב) מהי התשובה לשאלה אם הקבוצות לובשות חולצות קבוצתיות בצבעים שונים לכל אחת מהקבוצות?

א. הדבר שקול לסידור ארבעת האנשים בשורה (), כאשר הסדר הפנימי בין כל חמישיה לא משנה () וגם הסדר בין החמישיות לא משנה (), לכן התשובה היא .

ב. בכיוון אחר: בכל שלב עלינו להכניס אנשים לקבוצה אחת, וזוהי בחירה של 5 מתוך מספר האנשים הקיימים:

## 25. במסעדה מסוימת ישנם ארבעה סוגי מרק.

### א. אדם רעב מאד נכנס למסעדה ומעוניין להזמין שבע מנות מרק לעצמו. כמה אפשרויות הזמנה עומדות בפניו?

זהו מקרה של בחירת 7 עצמים מתוך 4 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר.

### ב. שבעה אנשים נכנסים למסעדה ומעוניינים להזמין מנת מרק אחת לכל אחד. כמה אפשרויות עומדות בפניהם?

כאן זהו מקרה של בחירת 7 עצמים מתוך 4 עם חזרות ועם חשיבות לסדר.

## 26.

### א. יש לזרוק עשר שקיות זבל (שונות) ונתונים שבעה פחי אשפה. בכמה אופנים ניתן לחלק את השקיות בין הפחים?

בחירת 10 עצמים מתוך 7 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר.

### ב. בכמה אופנים ניתן לחלק עשר סוכריות זהות בין שבעה ילדים?

זהו מספר הפתרונות למשוואה במספרים שלמים אי שליליים, והוא שווה למספר האפשרויות לסדר את עשר הסוכריות עם שש מחיצות, ובקיצור זוהי בחירה של שש מתוך שש-עשרה:

## 27 . יש ליצור קוד בעל 20 ספרות כאשר כל ספרה (מלבד הימנית) קטנה או שווה מזו שלימינה. מה מספר הקודים שניתן ליצור כך ש:

לכל מספר נגדיר משתנה שיבטא את מספר הפעמים שהספרה מופיעה בקוד, ולכן האפשרויות ליצירת הקוד שקולות לפתרון המשוואה (בשלמים אי-שליליים):

### ~~א. הספרה " 0" מופיעה בקוד?~~

### ב. הספרה " 3" מופיעה בקוד בדיוק 0 פעמים?

ידוע כי שווה 0, ולכן מדובר זה שקול לסידור של 20 כדורים עם 8 מחיצות ביניהם, דהיינו בחירה של 8 מתוך 28:

### ג. הספרה " 3" מופיעה בקוד לכל היותר 4 פעמים?

כאן יש לנו אילוץ . ניתן לפתור באמצעות משפט ההכלה וההדחה, אך מכיון שהוא לא נכלל בפרק זה, נפתור בלעדיו:

לכל עלינו לסדר כדורים עם 8 מחיצות ביניהם, דהיינו בחירה של 8 מתוך :

### ~~ד. הספרה " 7" מופיעה בקוד לפחות פעמיים והספרה " 3" מופיעה לכל היותר 4 פעמים?~~

### ה. ענה/י שנית על סעיפים ב ו-ג כאשר נדרש שהקוד יהיה בעל 20 ספרות לכל היותר.

באופן כללי: עלינו לסדר 20 כדורים עם 10 מחיצות בשורה (ה"כדורים" שאחרי המחיצה העשירית הם הספרות שלא השתמשנו בהם בקוד. לדוגמא אם הקוד שלנו הוא באורך 17 ספרות – נותרו 3 כדורים אחרי המחיצה העשירית).

ב. ידוע כי שווה 0, ולכן מדובר זה שקול לסידור של 20 כדורים עם 9 מחיצות ביניהם, דהיינו בחירה של 9 מתוך 29:

ג. לכל עלינו לסדר כדורים עם 9 מחיצות ביניהם, דהיינו בחירה של 9 מתוך :

## 28. נתונות שתי קבוצות: אשר עוצמותיהן: .

### א. חשב/י את מספר הפונקציות מ ל.

בחירת פריטים מתוך עם חזרות ועם חשיבות לסדר: . זוהי נוסחא הנלמדת בשיעורים.

### ב. חשב/י את מספר הפונקציות מ ל שהן חד-חד ערכיות.

בחירת פריטים מתוך בלי חזרות ועם חשיבות לסדר:

אם ישנן 0 אפשרויות, כמובן מאליו.

אם לא, אז מדובר בסידור של פריטים ב מקומות:

הוכחה נוספת: בתחילה בוחרים את האיברים בקבוצה B שהם יהיו בקבוצה , ואח"כ ישנן אפשרויות לסידור הפנימי:

### ג. חשב/י את מספר הפונקציות מ ל. שהן על בהנחה ש.

יש לנו 4 אפשרויות לגבי מספר האיברים בA ש"ילכו" לאיבר הראשון של B (כי לא כל האיברים "הולכים" לאותו איבר), ובכל אחת מהן צריך לבחור את האיברים האלו מתוך חמשת איברי A. כל שאר האיברים "ילכו" לאיבר השני בB.

## 29. מהו מספר הפתרונות של המשוואה כאשר:

### ~~א. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים?~~

### ב. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים וכן ?

#### פתרון ראשון – שגוי:

נגדיר משתנים אחרים עם משוואה שקולה, כאשר כל המשתנים הם שלמים אי שליליים:

זה שקול לסידור 12 כדורים ו4 מחיצות בשורה, דהיינו בחירת מקומותיהן של המחיצות: 4 מתוך 16:

#### פתרון שני – מתוקן:

**נשים לב שכבר ידוע ש, ולכן האילוץ הינו מיותר!**

נגדיר משתנים אחרים עם משוואה שקולה, כאשר כל המשתנים הם שלמים אי שליליים:

זה שקול לסידור 9 כדורים ו4 מחיצות בשורה, דהיינו בחירת מקומותיהן של המחיצות: 4 מתוך 13:

### ~~ג. כל הנעלמים הם מספרים שלמים וחיוביים (גדולים ממש מ0) ובנוסף לכך הוא מספר זוגי?~~

### ד. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים, ובנוסף לכך אי-זוגיים, ואילו זוגיים?

נחליף משתנים:

זה שקול לסידור 6 כדורים ו4 מחיצות בשורה, דהיינו בחירת מקומותיהן של המחיצות: 4 מתוך 10:

### ~~ה. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים, ובנוסף לכך זוגיים, ואילו אי-זוגיים?~~

אפס. לא ייתכן שסכום של מספרים זוגיים עם מספר זוגי של מספרים אי זוגיים ייתן מספר אי-זוגי.

## 30. מהו מספר הפתרונות של אי השיויון כאשר כל הנעלמים הם שלמים אי שלילים?

נוסיף משתנה-סרק, ונקבל שזה שקול לפתרון המשוואה (בנעלמים שלמים אי-שליליים):

זה שקול לסידור 15 כדורים ו5 מחיצות בשורה, דהיינו בחירת מקומותיהן של המחיצות: 5 מתוך 20:

## 32. נתונים ארבעה תאים ממוספרים. יש להכניס לתאים שלושה כדורים שונים.

### א. בכמה אופנים ניתן להכניסם כאשר אין מגבלות נוספות?

בחירת 3 מתוך 4 כאשר חזרה מותרת וחשוב הסדר:

### ב. בכמה אופנים ניתן להכניסם כאשר נדרש שכל תא יכיל לכל היותר כדור אחד?

בחירת 3 מתוך 4 כאשר מותרות חזרות וחשוב הסדר:

## 34. במשפחתון של ליאת יש חמשה ילדים חמודים ו 30 משחקים שונים. בכמה אפשרויות ניתן לחלק את המשחקים בין הילדים כך ש:

### א. ללא מגבלה.

מספר הפונקציות מ30 ל5: בחירת 30 מספרים מתוך 5 עם חזרות ועם חשיבות לסדר:

### ב. שני ילדים יקבלו 9 משחקים כל אחד והיתר יקבלו 4 כל אחד.

יש כאן תהליך רב-שלבי:

שלב א': בחירת שני הילדים שיקבלו 9 משחקים – בחירת 2 מתוך 5 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר: .

שלב ב-ו: בכל שלב עלינו לחלק משחקים לילד אחד, וזוהי בחירה של 9 או 4 מתוך מספר המשחקים שעדיין לא חולקו:

ובסה"כ:

### ג. כל ילד יקבל 6 משחקים.

יש לנו חמשה שלבים, כשבכל שלב עלינו לחלק משחקים לילד אחד, וזוהי בחירה של 6 מתוך מספר המשחקים שעדיין לא חולקו:

### ד. כל ילד יקבל 4 משחקים ויתר המשחקים יישארו לליאת.

זה משעמם להעתיק את הסעיף הקודם ולשנות רק את המספרים, אז נפתור בכיוון אחר:

זה שקול לסידור כל המשחקים בשורה, כאשר בחמשת הרביעיות הראשונות לא משנה הסדר, וגם במשחקים שנותרו לא משנה הסדר:

### ה. ענה על הסעיפים הקודמים בהנחה שהמשחקים זהים.

א. זהו פתרון למשוואה:

שזה שקול לסידור 30 המשחקים עם חמשת הילדים בשורה, כאשר הילד הראשון עומד במקום הראשון, ולכן נותר רק לבחור 4 מתוך 34 מקומות להצבת הילדים הנותרים:

ב. צריך רק לבחור את שני הילדים שיקבלו 9 משחקים – בחירת 2 מתוך 5 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר: .

ג-ד. כל האפשרויות לחלוקה שקולות, ולכן יש רק אפשרות אחת.

## 36. נתונים "1"-ים, ו "0"-ים. הוכח/י שמספר הדרכים לסדר אותם בשורה כך ש לא יהיו שני "1"-ים סמוכים הוא .

אחרי כל "1" חייב להופיע "0" חוץ מה"1" האחרון, ולכן נתייחס לכל זוג כזה כאיבר בודד של "X", וגם ל"1" האחרון נתייחס כאל "X". כיון שכך עלינו לסדר בשורה איברים מסוג "X" ו איברים מסוג "0". שורה תחתונה: עלינו לבחור את המקומות שבהם יעמדו ה"X"-ים מתוך מקומות, שזה בדיוק מקומות.

הגענו לבחירה של מתוך .

מ.ש.ל.